

Лекция 9. Дифракция (продолжение)



1. Приближение Френеля в теории дифракции.
2. Дифракция Френеля на одномерных структурах.
3. Дифракция Фраунгофера как пространственное преобразование Фурье.
4. Предел разрешения оптических приборов.
5. Дифракционные решетки.

Огюстен Жан Френель родился в Брогли в 1788 г.



В 1806 году окончил Политехническую школу. В 1809 году также окончил Школу мостов и дорог в Париже . В период временного возвращение Наполеона из ссылки работал инженером, после чего лишился работы как участник военных действий. Впоследствии перешёл в Политехническую школу.

Основные работы Френеля посвящены физической оптике. Физику изучал самостоятельно после ознакомления с работами Малюса. Также самостоятельно начал проводить эксперименты по оптике. В 1816 году переоткрыл принцип интерференции , проделав по сравнению с Томасом Юнгом несколько новых опытов (в частности опыт с

«бизеркалами Френеля»). В 1816 году дополнил принцип Гюйгенса, введя представление о когерентной интерференции элементарных волн, излучаемых вторичными источниками. Исходя из этого принципа, в 1818 году разработал теорию дифракции света, на основе которой предложил метод расчёта дифракционной картины, основанный на разбиении фронта волны на зоны (так называемые зоны Френеля). С помощью этого метода рассмотрел задачу о дифракции света на краю полуэкрана и круглого отверстия.

Интеграл Гюйгенса-Френеля в развитии Кирхгофа:

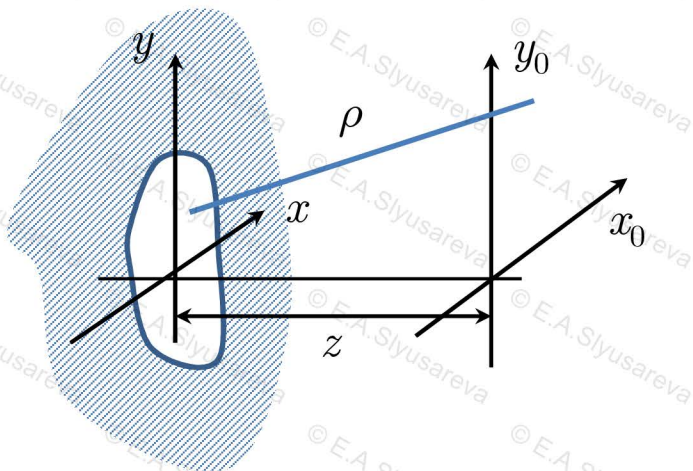
$$E(P) = \int_{\Sigma} E(M) \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} K(\varphi) d\sigma$$

$E(P)$ и $E(M)$ – комплексные амплитуды поля в точках P и M , $K(\varphi)$ – коэффициент наклона, монотонно убывающий от начального значения $K(0)$ до нуля при изменении угла φ от 0 до $\pi/2$

$$K(\varphi) = \frac{1}{2\lambda} (1 + \cos \varphi)$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad E(P) = \frac{i}{\lambda} \int_{\Sigma} E(M) \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} d\sigma$$

Приближение Френеля в теории дифракции



$$E(x_0, y_0, z) = \frac{i}{\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) \frac{\exp(-ik\rho)}{\rho} dx dy$$

$$\rho = \sqrt{z^2 + (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

При выполнении условия слабо расходящихся пучков:

$$z \gg x, y, x_0, y_0$$

$$\rho = z + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2}$$

Решение задачи дифракции в **приближении Френеля**:

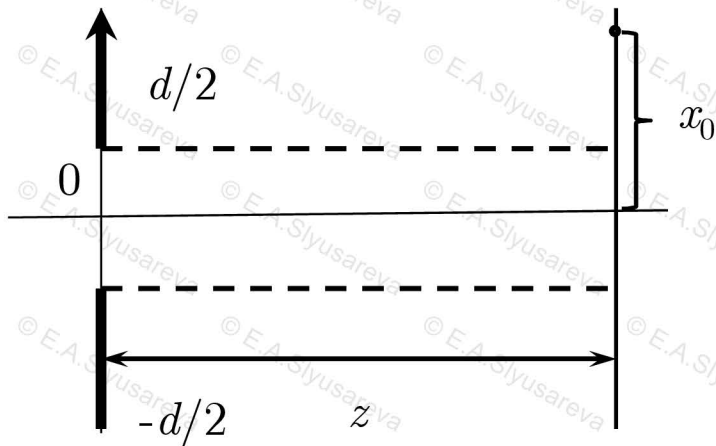
$$E(x_0, y_0, z) = \frac{i}{\lambda z} e^{-ikz} \iint_{-\infty}^{\infty} E_0(x, y) \exp\left[-ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2z}\right] dx dy$$

Приближение Френеля исключает из рассмотрения некоторые области пространства: это область вблизи экрана с отверстием, а также точки пространства, лежащие на больших расстояниях от оси пучка. Однако из физических соображений ясно, что в первой из указанных областей световое поле почти такое же, как в падающей волне, а во вторую область свет почти не проникает. Поэтому этими областями можно пренебречь.

Дифракция Френеля на щели

$$E(x_0, z) = \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda z}} e^{-ikz} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) \exp\left[-\frac{ik(x-x_0)^2}{2z}\right] dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{iky^2}{2z}\right] dy = \sqrt{\frac{2\pi z}{ik}} = (1-i) \sqrt{\frac{\pi z}{k}}$$



$$E_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq d/2 \\ 0, & |x| > d/2 \end{cases}$$

К расчету дифракции плоской волны на щели

$$E(x_0, z) = E(x_0) \frac{1+i}{\sqrt{2\lambda z}} e^{-ikz} F(x_0)$$

$$F(x_0) = \int_{-d/2}^{d/2} \exp\left[-\frac{ik(x-x_0)^2}{2z}\right] dx$$

Введем переменную: $\xi = (x - x_0) \sqrt{\frac{k}{2\pi}}$

$$\xi_1 = -\left(\frac{d}{2} + x_0\right) \sqrt{\frac{k}{\pi z}}$$

Тогда: $F(x_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left(-\frac{i\pi\xi^2}{2}\right) dx$

$$\xi_2 = \left(\frac{d}{2} - x_0\right) \sqrt{\frac{k}{\pi z}}$$

Распределение интенсивности света в дифракционной картине запишем в виде:

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{kd^2}{4\pi z}} \left(1 + \frac{2x_0}{d}\right) = -\sqrt{2N_F} \left(1 + \frac{2x_0}{d}\right)$$

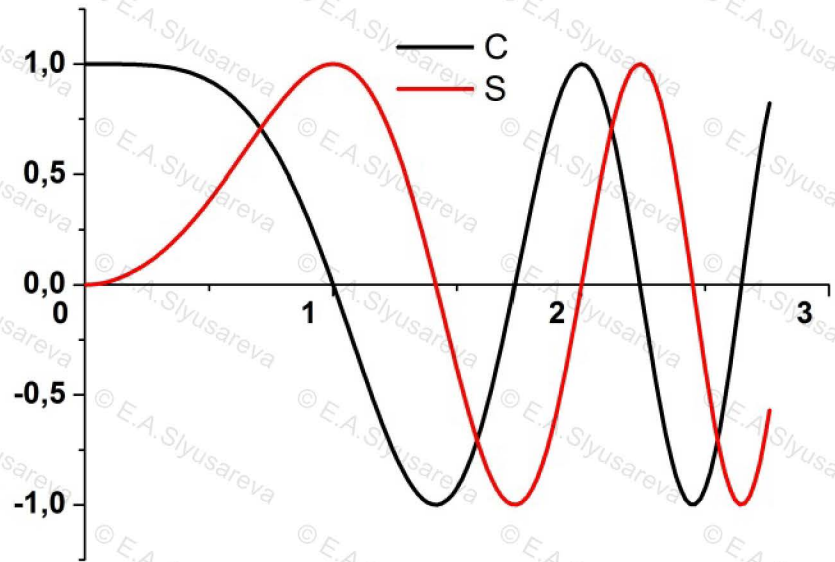
$$\xi_2 = \sqrt{\frac{kd^2}{4\pi z}} \left(1 - \frac{2x_0}{d}\right) = \sqrt{2N_F} \left(1 - \frac{2x_0}{d}\right)$$

$$I(x_0, z) = \frac{1}{2} I_0 \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left(\frac{i\pi\xi^2}{2}\right) dx \right|^2$$

Удобно выразить интеграл через функции Френеля:

$$C(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

$$S(\xi) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \sin\left(\frac{\pi t^2}{2}\right) dt$$

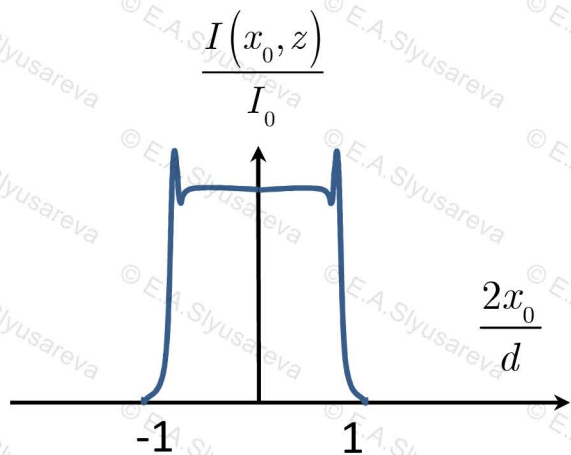


Окончательно:

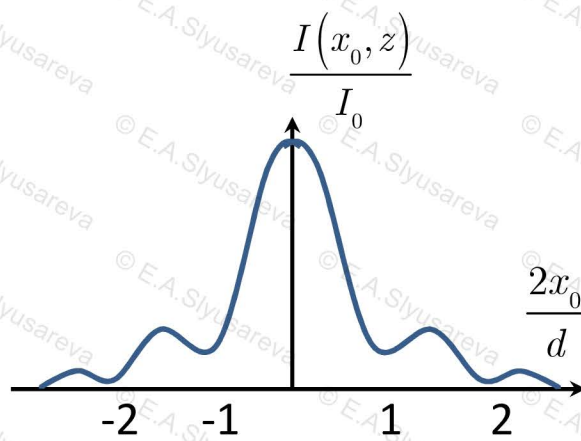
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left(-\frac{i\pi\xi^2}{2}\right) dx = [S(\xi_1) - S(\xi_2)]^2 + [C(\xi_1) - C(\xi_2)]^2$$

Дифракция плоской волны на щели

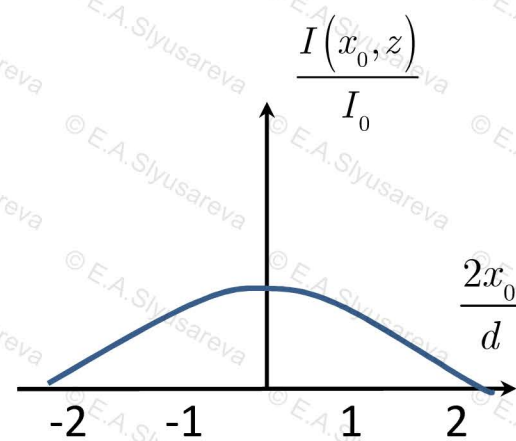
$$I(x_0, z) = \frac{1}{2} I_0 \left| \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left(\frac{i\pi\xi^2}{2}\right) dx \right|^2$$



$$N_F = 30 \gg 1$$



$$N_F = 0,5 \approx 1$$



$$N_F = 0,125 \ll 1$$

В одномерном случае:

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{i+1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) \exp\left(-\frac{ikx^2}{2b}\right) \exp(ikx \sin \Theta) dx$$

$\sin \Theta = \frac{x_0}{b}$ - угловая координата точки наблюдения поля

Из формулы следует, что угловое распределение поля в дифракционной картине меняется по мере изменения расстояния z . Однако в области больших z это изменение становится все более и более слабым и при

$$\frac{kd^2}{2b} \ll 1 \text{ или } z \gg z_d = \frac{kd^2}{2}$$

наблюдается устойчивое угловое распределение поля

Это распределение задается формулой:

$$E(x_0, y_0, z) = \frac{i + 1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{-ikb} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) \exp(ikx \sin \Theta) dx$$

Область пространства, определяемая условием, называется дальней зоной дифракции или **зоной Фраунгофера**. Таким образом, в дальней зоне формируется устойчивое угловое распределение поля, не меняющееся при дальнейшем распространении светового пучка. Выражение называют дифракционным интегралом в приближении Фраунгофера. Оно справедливо в дальней дифракционной зоне.

С математической точки зрения последнее выражение представляет собой пространственный интеграл Фурье. По аналогии с интегралом Фурье по времени величину $k_x = k \sin \Theta$ называют пространственной частотой.

Между пространственной частотой k_x и угловой координатой Θ точки наблюдения поля имеется взаимно однозначное соответствие. Это позволяет записать комплексную амплитуду поля в точке наблюдения следующим образом:

$$E(P) = \frac{i+1}{\sqrt{2\lambda b}} e^{ikb} E_0(k_x) \exp(ikx \sin \Theta) dx$$

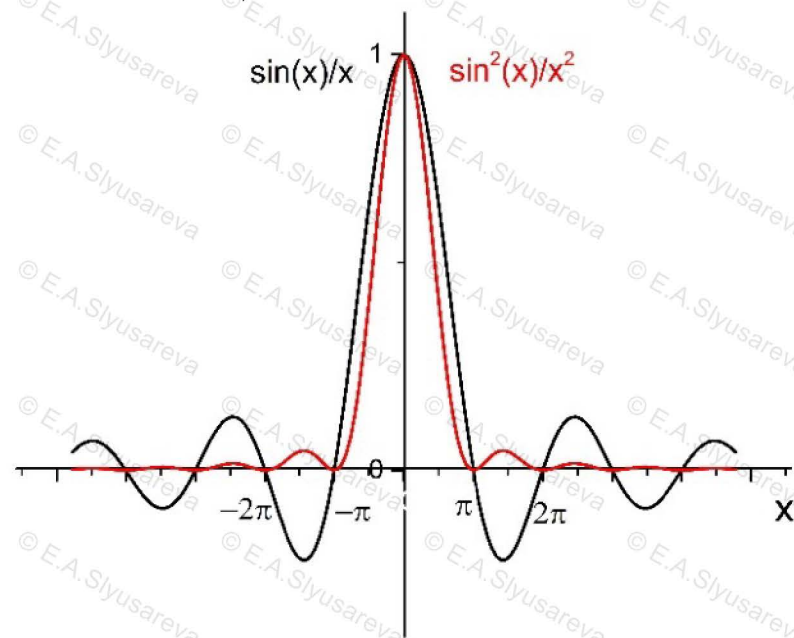
$$E_0(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x) \exp(ikx \sin \Theta) dx$$

где $E_0(k_x)$ — пространственная спектральная амплитуда, соответствующая распределению поля $E_0(x)$. Таким образом, дифракционное поле в дальней зоне пропорционально пространственной фурье-амплитуде исходного пучка.

Угловое распределение интенсивности излучения в дальней зоне повторяет форму углового спектра светового пучка. Отсюда следует физический смысл фраунгоферовой дифракции как пространственного разложения ограниченного светового пучка на плоские волны. Согласно спектральным представлениям, поперечная компонента волнового вектора возникает вследствие ограничения апертуры (т.е. поперечных размеров) пучка отверстием. Представление ограниченного пучка в виде набора плоских волн, распространяющихся в разных направлениях, аналогично представлению импульса конечной длительности в виде суммы гармонических колебаний разных частот.



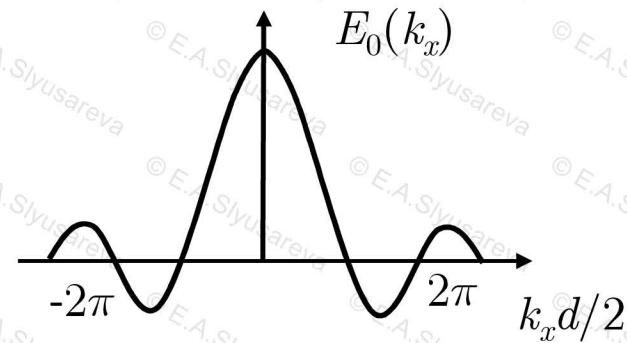
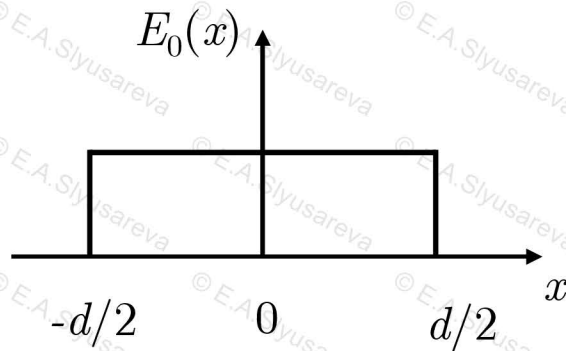
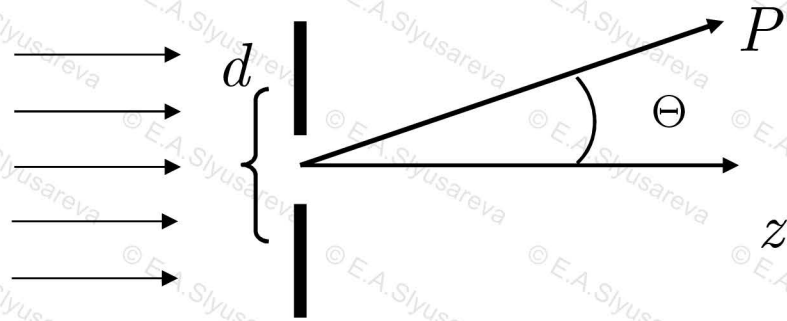
$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) \exp(i\omega t) dt$$



$$|E(\omega)|^2 = \frac{\tau^2}{4} E_0^2 \frac{\sin^2(\omega_0 - \omega) \tau / 2}{[(\omega - \omega_0) \tau / 2]^2}$$

Дифракция Фраунгофера на щели

$$E_0(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq d/2 \\ 0, & |x| > d/2 \end{cases}$$

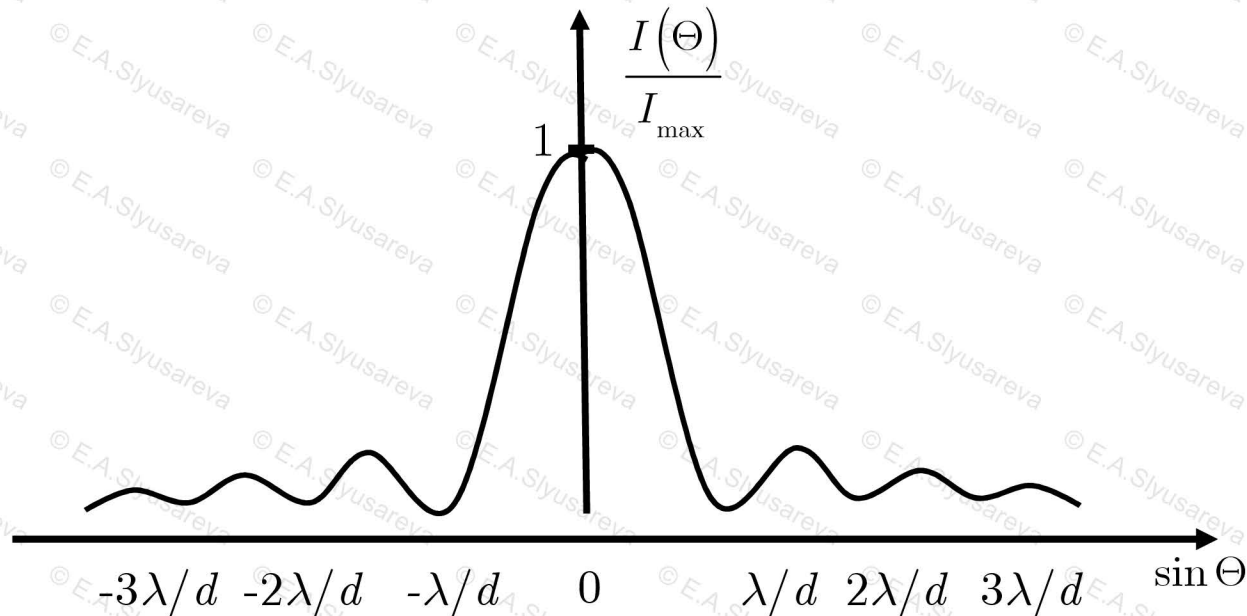


$$E(k_x) = E_0 \int_{-d/2}^{d/2} E_0(x) e^{ik_x x} \sin \Theta dx = E_0 d \cdot \frac{\sin\left(\frac{k_x d}{2}\right)}{\left(\frac{k_x d}{2}\right)}$$

$$I_{\max} = \frac{I_0 d^2}{\lambda b}$$

$$k_x = k \sin \Theta$$

$$I(P) = I_{\max} \frac{\sin^2 \left(kd \sin \left(\Theta/2 \right) \right)}{\left(kd \sin \left(\Theta/2 \right) \right)^2} = I_{\max} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi d \sin \Theta}{\lambda} \right)}{\left(\frac{\pi d \sin \Theta}{\lambda} \right)^2}$$



Определим дифракционную расходимость пучка в дальней зоне исходя из условия

$$I(\Theta) = 0.$$

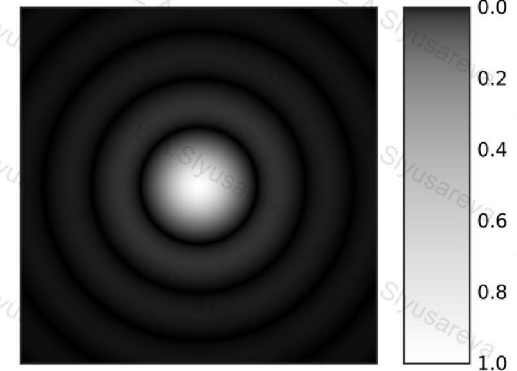
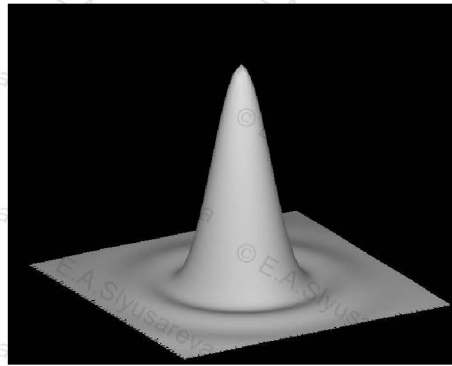
$$\text{При } \Theta \ll 1, \quad \Theta = \lambda/d$$

Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии

В случае круглого отверстия угловое распределение интенсивности в дальней зоне описывается функцией Эйри:

$$I(\Theta) = I_0 \left[\frac{J_1(u)}{u} \right]^2$$

где I_0 — интенсивность падающей волны; $J_1(u)$ — функция Бесселя первого порядка; $u = 2\pi\Theta r/\lambda$; r — радиус отверстия.



На центральный максимум, называемый *диск Эйри*, приходится 84% светового потока. Полная угловая ширина (дифракционная расходимость) равна:

$$\Theta_d = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$

Предел разрешения оптических приборов

Способность оптических приборов, давать отдельные изображения двух близко расположенных точечных объектов, называется **разрешением**. Разрешение линзы тем больше, чем более близко лежащие точки различимы, как отдельные изображения. Два принципиальных фактора ограничивают разрешение линзы:

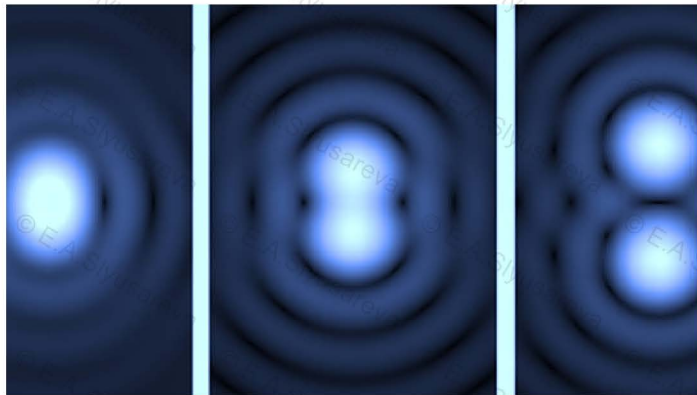
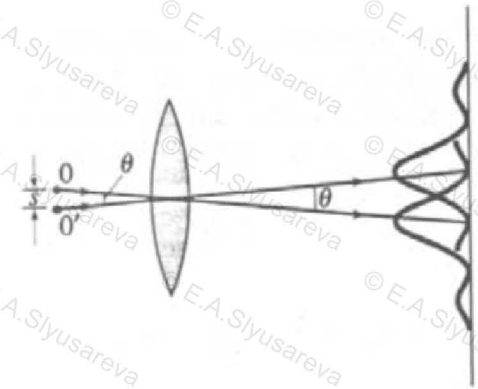
- наличие aberrаций;
- дифракция, которая принципиально неустранима, так как она есть результат волновой природы света.



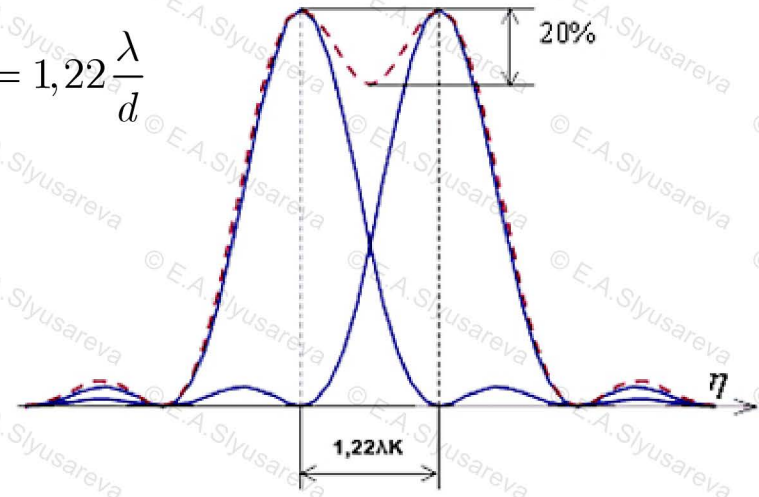
Любая линза имеет конечную апертуру (поперечный размер). При формировании изображения точечного объекта с помощью линзы, имеет место дифракция на ее апертуре. Для круглого отверстия изображение точки представляет диск Эйри, окруженный чередующимися темными и светлыми интерференционными кольцами. Если два точечных объекта очень близки, то их изображения перекрываются.

Критерий Релея

Критерий Рэлея - два изображения разрешимы, когда центр дифракционного диска одного изображения совпадает с первым минимумом дифракционной картины другого. Другими словами, это означает, что два объекта разрешимы, если они разделены углом Θ_d .



$$\Theta_d = 1,22 \frac{\lambda}{d}$$



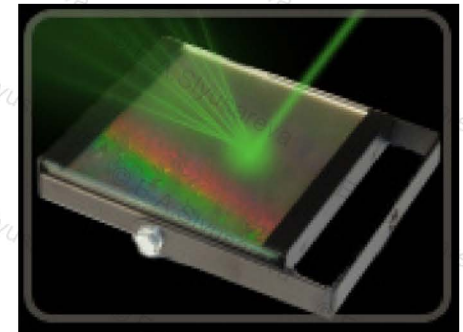
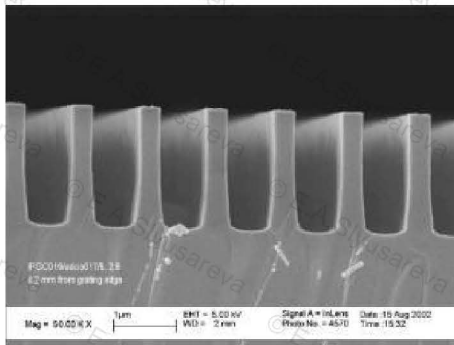
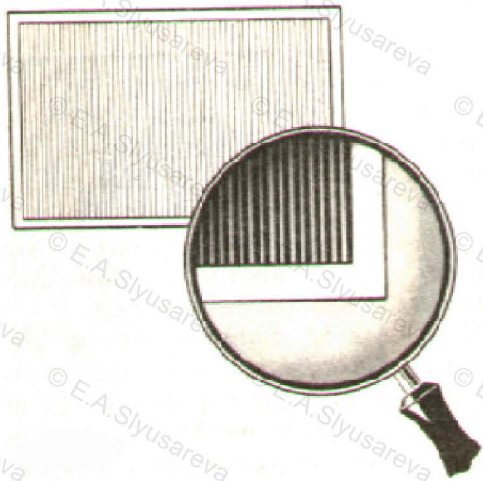
Задача. С самолета на высоте 3000 м фотографируют землю. На снимке разрешаются предметы размером 50 см. Определить диаметр объектива фотоаппарата.

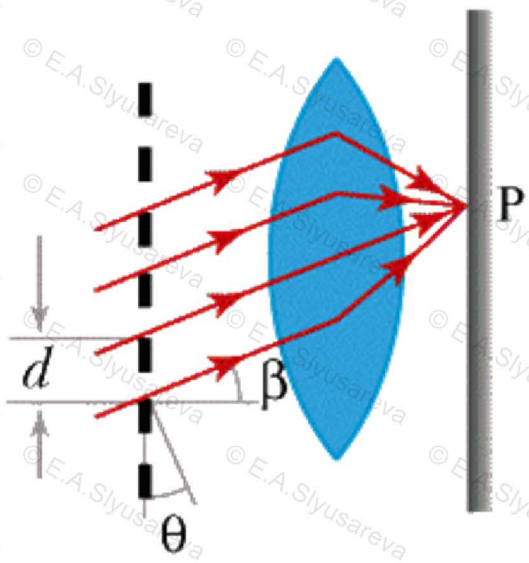
Дифракционные решетки

Дифракционная решетка представляет собой пространственную периодическую структуру, период которой соизмерим с длиной световой волны. Различают:

- пропускательные,
- отражательные,
- амплитудные,
- фазовые решетки.

Пропускательные решетки работают на пропускание света, отражательные — на отражение. Амплитудные решетки пространственно модулируют амплитуду, а фазовые — фазу световой волны.





Падающая на решетку световая волна создает в щелях когерентные (сфазированные) источники вторичных световых волн. Результирующее световое поле образуется в результате интерференции этих волн. Определим распределение интенсивности света в фраунгоферовой дифракционной картине, наблюдаемой на бесконечности либо в фокальной плоскости линзы при падении на решетку плоской монохроматической волны.

Дифракция Фраунгофера на системе одинаковых параллельных щелей

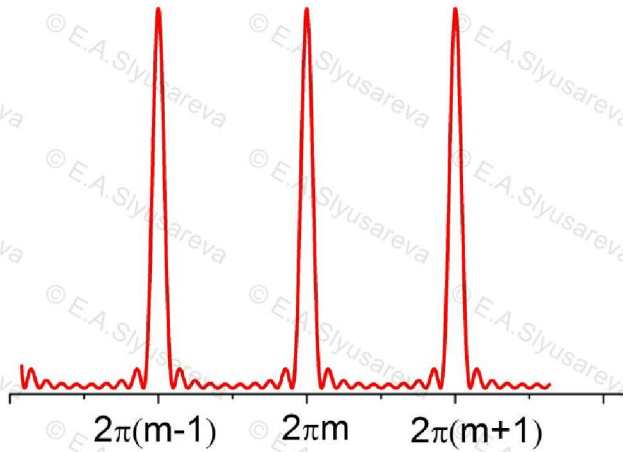
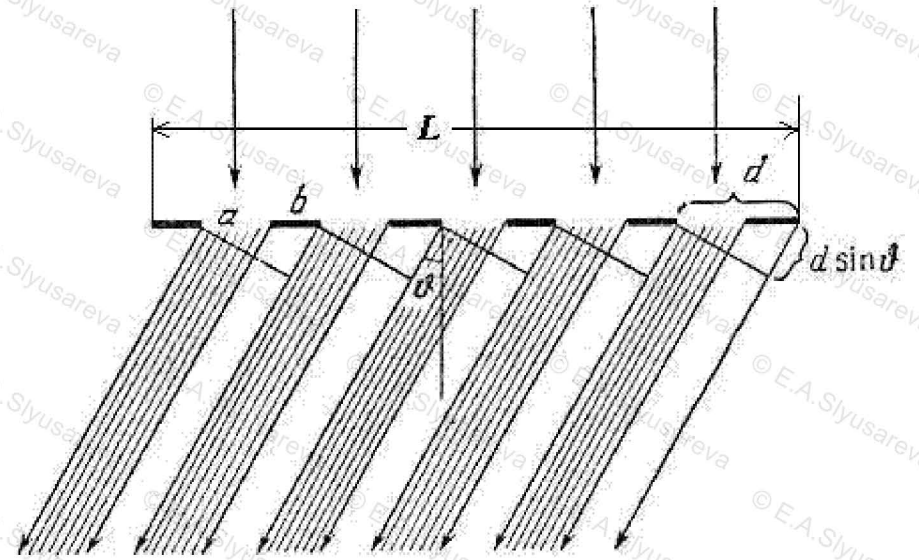
Поля, излучаемые щелями, имеют вид (δ - разность фаз между соседними щелями):

$$E_1 = E_0 \frac{\sin u}{u}, E_2 = E_1 e^{i\delta}, \dots, E_N = E_1 e^{i(N-1)\delta}$$

Полная напряженность в точке P от всех N периодических элементов решетки есть сумма всех полей

$$E_P = E_1 \left[1 + e^{i\delta} + e^{2i\delta} + \dots + e^{i(N-1)\delta} \right] = E_1 \frac{1 - e^{iN\delta}}{1 - e^{i\delta}}$$

$$I_P = I_1 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



Распределение интенсивности при
фраунгоферовской дифракции на
решетке, состоящей из одинаковых
щелей $N = 10$

В тех направлениях, для которых $\delta/2 = m\pi$ ($m = \pm 1; \pm 2, \dots$), интенсивность в N^2 раз больше, чем от одной щели. Так происходит потому, что разность хода Δ вторичных волн от соседних щелей равна целому числу длин волн ($\Delta = m\lambda$), и все они приходят в точку наблюдения в одинаковой фазе. Таким образом, в этом направлении будет наблюдаться максимум интенсивности. Такие максимумы называются главными, а целое число m — порядком главного максимума или **порядком спектра**.

При наклонном падении плоской волны под углом Θ' разность хода соседних пучков Δ и положение главных максимумов определяется условием:

$$\Delta = d(\sin \Theta_m - \sin \Theta') = m\lambda$$

При нормальном падении: $d \sin \Theta_m = m\lambda$

Положение главных максимумов дифракционной картины зависит от длины волны. Поэтому, если направить на решетку пучок некогерентного излучения, то разные спектральные составляющие излучения будут отклоняться решеткой на разные углы. Отсюда вытекает возможность использовать дифракционную решетку как **спектральный прибор**, который, подобно призме, осуществляет пространственное разложение некогерентного излучения по длинам волн.

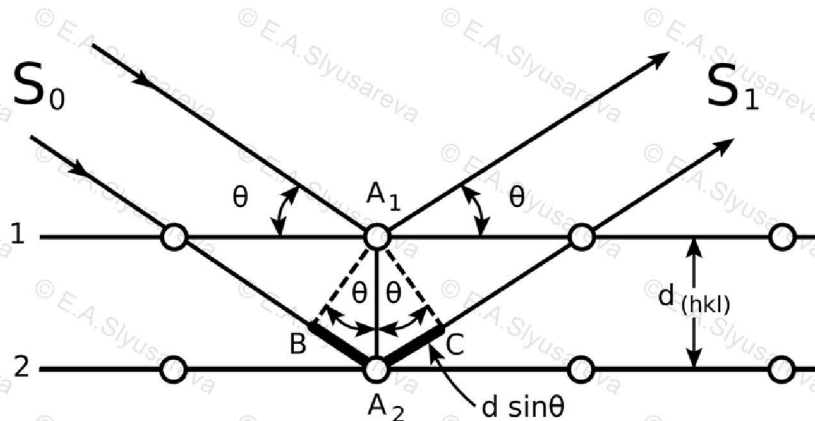
Разрешающая способность: $R = \frac{\lambda}{d\lambda}$

Согласно критерию Релея интерференционный максимум m -го порядка для λ_1 должен совпадать с минимумом для λ_2 :

$$m\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\lambda_1}{N}$$

$$R = mN$$

Дифракция рентгеновских лучей



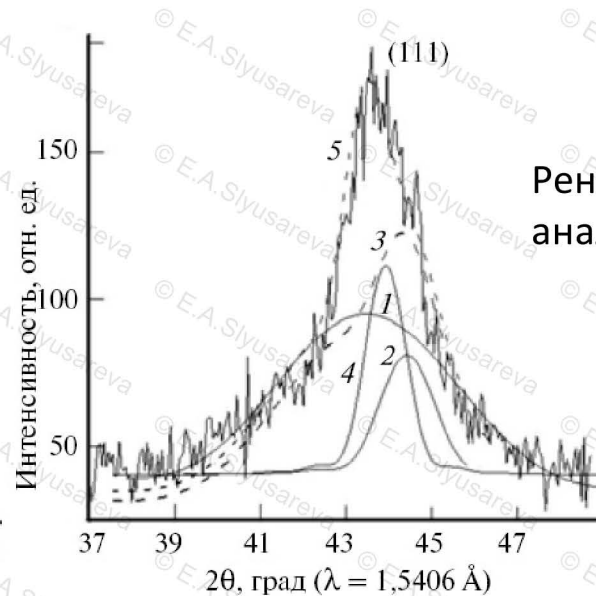
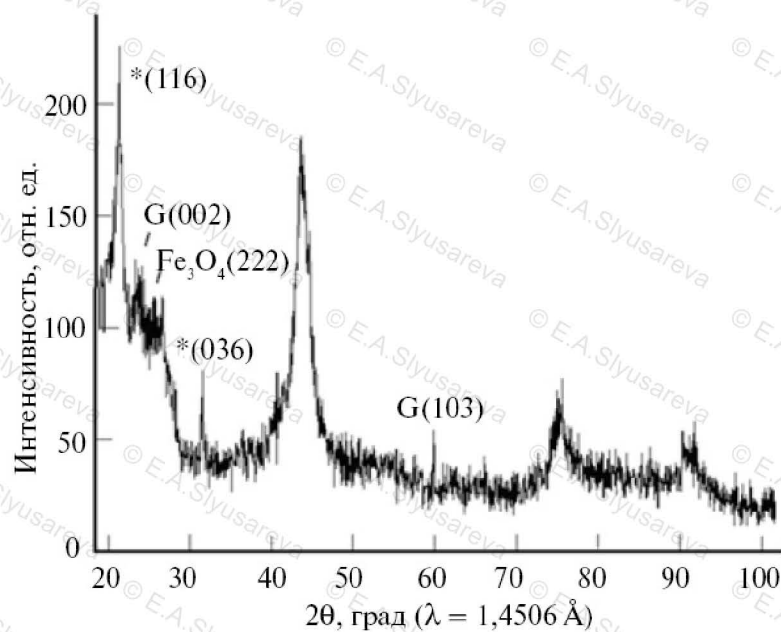
Электромагнитное излучение с длиной волны порядка единиц нанометров и менее называют **рентгеновским**

Предположим, что параллельный монохроматический пучок рентгеновских лучей с длиной волны λ падает под углом Θ на поверхность кристалла, с кубической решеткой, где атомы расположены на расстоянии d . Два луча, отраженных от соседних атомных плоскостей конструктивно интерферируют, если выполняются следующие условия:

$$2d \sin \Theta = m\lambda, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Формулу называют **условием Вульфа-Брэгга**.

Если известна λ , то, измеряя Θ и m , можно найти d — расстояние между кристаллографическими плоскостями, т.е. можно определять структуру кристаллов — **рентгеноструктурный анализ**.



Рентгеноструктурный анализ наноалмазов

Если известно d , то, измеряя Θ и m , можно определить длину волны падающего излучения — **рентгеновская спектроскопия**.