

Лекция 10

План

1. Классическая электронная теория дисперсии Лоренца:
 - показатель преломления среды,
 - дисперсия и поглощение света в линейной изотропной среде.
2. Распространение светового импульса в диспергирующей среде, групповая скорость.
3. Рассеяние света в мутных средах. Цвет неба и поляризация света при рассеянии.

Классическая электронная теория дисперсии Лоренца

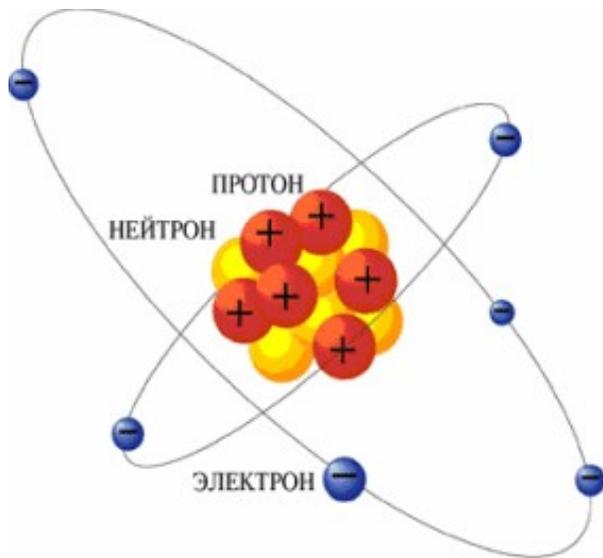
При рассмотрении распространения света в веществе были феноменологически введены **материальные уравнения**, связывающие поляризованность среды P (или электрическую индукцию D) с напряженностью E электрического поля монохроматической волны, что позволило описать свойства монохроматических плоских волн в веществе. В линейной изотропной среде материальные уравнения имеют вид:

$$\vec{P} = \alpha(\omega) \vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E} \qquad \varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega)$$

Проблема! Для обоснования феноменологических материальных уравнений и нахождения явного вида входящей в них диэлектрической восприимчивости α (или диэлектрической проницаемости ε) в той или иной среде необходимо рассматривать микроскопическую теорию взаимодействия световой волны с веществом.

Наиболее правильная и последовательная теория взаимодействия света с веществом должна строиться на основе **квантовой механики**.

Классическая осцилляторная моделью атома (модель Лоренца)



Среда представляет собой группу невзаимодействующих между собой атомов (по крайней мере это справедливо для газообразной среды). В простейшем случае предполагается, что в атоме имеется один электрон, называемый **оптическим**, связанный с ядром, которое считается неподвижным. В первом приближении предполагается, что сила f , действующая на этот электрон со стороны ядра линейно зависит от смещения x электрона от положения равновесия:

$$\vec{f} = -k\vec{x}$$

Линейными называются среды, в которых связь между поляризованностью и напряженностью электрического поля является линейной функцией. Такое приближение справедливо, когда напряженность поля световой волны много меньше внутриатомных полей. В противном случае среды называют нелинейными и для них зависимость имеет нелинейный характер.

Изотропными называют среды, свойства которых не зависят от направления распространения света. В таких средах поляризованность ориентирована параллельно электрическому полю ($\vec{P} \parallel \vec{E}$). Среда считается анизотропной, когда вектор поляризованности не параллелен вектору поля. Свойства такой среды зависят от направления распространения волны.

Будем считать вещество *линейным, изотропным и однородным*. Оптическую поляризованность среды, имеющую смысл дипольного момента единицы объема, можно представить в виде:

$$\vec{P} = Ne\vec{x}$$

N — число атомов в единице объема, e — заряд электрона, $\vec{x} = \vec{x}(\vec{E})$ — смещение электрона относительно равновесного положения.

Пусть световая волна является плоской волной:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} \vec{E} \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] + \text{к.с.}$$

Уравнение движения осциллятора под действием световой волны согласно второму закону Ньютона имеет вид:

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{e}{m} \vec{\varepsilon}$$

Здесь m — масса электрона, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — собственная частота колебаний электрона в атоме; параметр γ описывает затухание колебаний, обусловленное тем, что колеблющийся электрон сам становится источником излучения.

$$\ddot{\vec{x}} + \gamma \dot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \vec{E} \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] + \text{к.с.}$$

Здесь \vec{r} имеет смысл радиус-вектора, который описывает положение электрона. Поскольку размер атома a много меньше длины световой волны λ , то $\vec{k} \vec{r} \approx ka = 2\pi a / \lambda \ll 1$. Поэтому приближенно атом можно считать точечным и не учитывать изменение поля в пределах атома.

Ищем решение уравнения в виде:

$$\vec{x} = \frac{1}{2} \vec{x}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \vec{r} \right) \right] + \text{к.с.}$$

Находим комплексную амплитуду смещения электрона относительно атомного ядра в состоянии равновесия, т.е. в отсутствие света:

$$x_0 = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Для поляризации среды получаем:
$$\vec{P} = Ne\vec{x} = \frac{1}{2} Ne\vec{x}_0 \exp\left[i(\omega t - \vec{k}\vec{r})\right] + k.c.$$

$$\vec{P}_0 = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{E}$$

Учитывая, что $\vec{P}_0 = \alpha(\omega)\vec{E}$, находим выражение для **линейной оптической восприимчивости** среды в модели Лоренца:

$$\alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

и для диэлектрической проницаемости
$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega)$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma}$$

Параметр $\omega_p = \sqrt{4\pi Ne^2/m}$ имеет размерность частоты и его часто называют "**плазменной частотой**"

Показатель преломления среды

Комплексный показатель преломления: $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)} = n' - in''$

$\operatorname{Re} n = n'$ Вещественный показатель преломления

$\operatorname{Im} n = n''$ Затухание световой волны

Если среда является разреженной (плотность атомов мала), то

$$n = 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Зависимость показателя преломления от частоты называют **дисперсией**, так как именно из-за дисперсии свет разлагается ("диспергирует") призмой в спектр.

Окончательно имеем:

$$n'(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \qquad n'' = \frac{\omega_p^2}{2} \frac{\omega\gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Дисперсия и поглощение света в линейной изотропной среде

$$k = \frac{\omega n}{c} = k' - ik'' \quad - \text{ волновое число}$$

Плоская световая волна в среде:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} E_0 e^{-k''z} \exp[i(\omega t - k'z)]$$

$$I = I_0 e^{-\alpha z}$$

где I_0 — интенсивность волны на границе среды; $\alpha = 2k'' = 2\omega n''/c$ — показатель поглощения среды. Формула отражает закон поглощения света в среде — **закон Бугера**.

Амплитуда волны по мере распространения в среде уменьшается по экспоненциальному закону — световая волна затухает. Говорят, что среда поглощает часть волны, и из среды она выходит, потеряв часть своей энергии. Потеря энергии связана с затуханием осцилляторов.

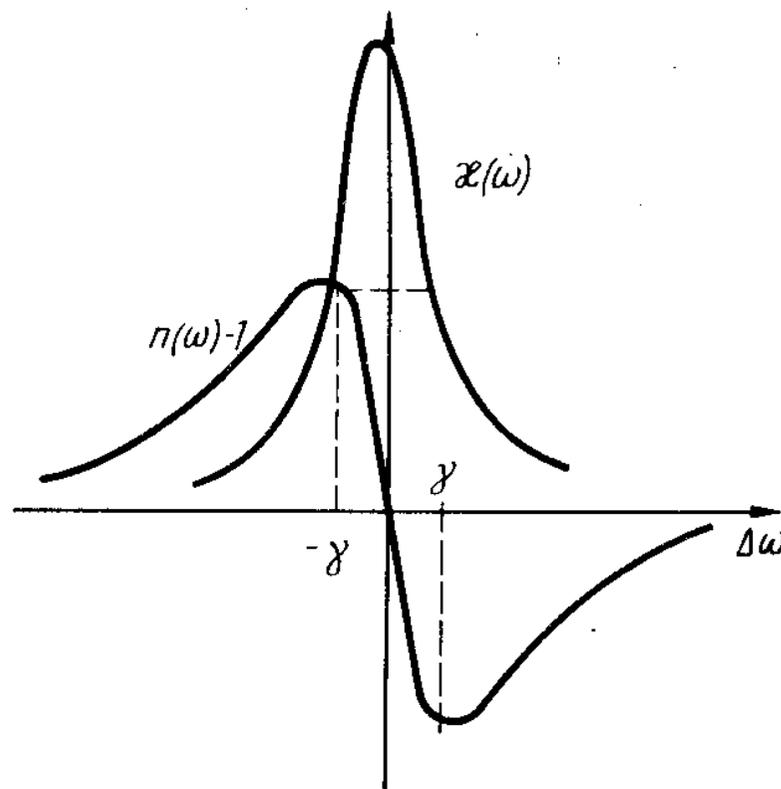
Вблизи резонанса при

$$|\omega_0 - \omega| \ll \omega_0, \omega_0^2 - \omega^2 \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

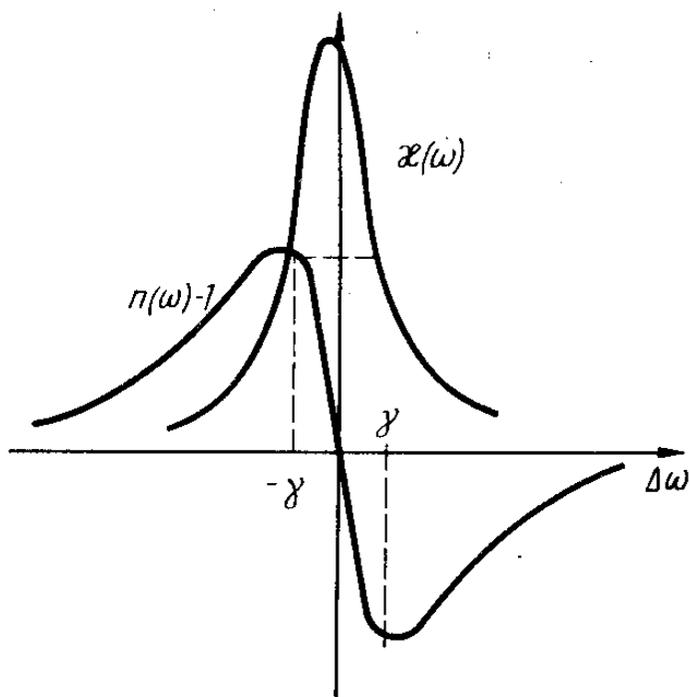
Выражения упрощаются:

$$n'(\omega) - 1 = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{(\omega_0 - \omega)}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}$$

$$n''(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4\omega_0} \frac{\gamma}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2/4}$$

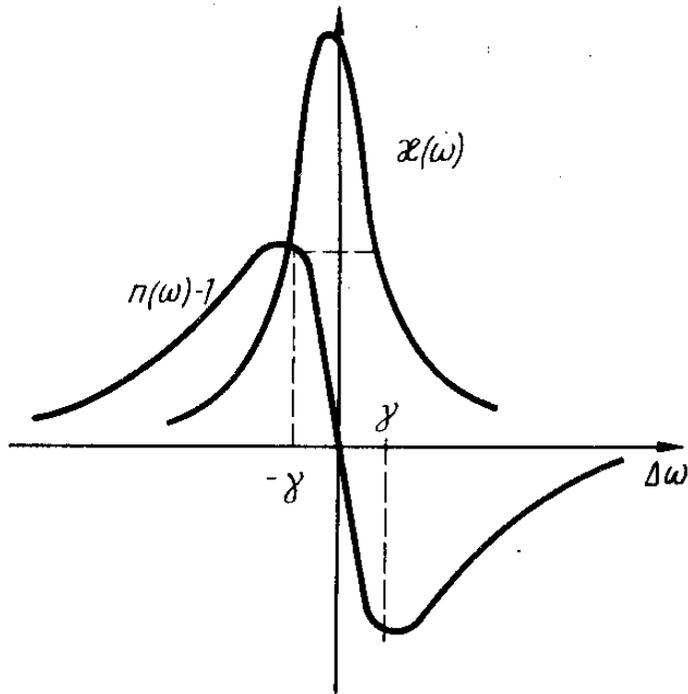


Дисперсионная кривая и контур поглощения



- Зависимость показателя поглощения от частоты называют **спектральным контуром** линии поглощения.
- График зависимости показателя преломления от частоты называют **дисперсионной кривой**.
- Показатель преломления n' заметно отличается от единицы лишь вблизи полосы поглощения, причем максимальное и минимальное значения он достигает на частоте $\omega=\omega_0\pm\gamma/2$ соответственно

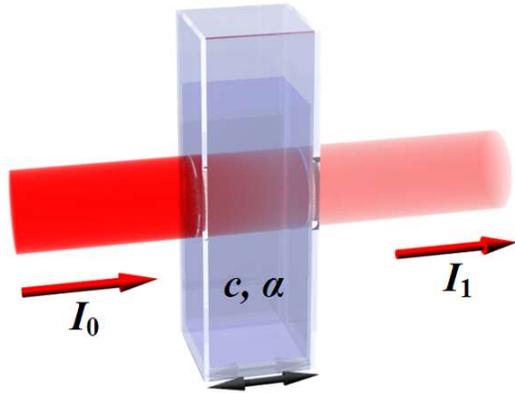
Дисперсионная кривая и контур поглощения



- В зависимости от знака производной $\partial n/\partial\omega$ выделяют две области частот: область нормальной дисперсии, где показатель преломления возрастает с ростом частоты света и область аномальной дисперсии, где показатель преломления уменьшается с ростом частоты

- При $\omega > \omega_0$ показатель преломления больше единицы, и в этом случае $v_{ph} < c$. При $\omega < \omega_0$ показатель преломления становится меньше единицы ($n < 1$), а значит скорость распространения света в веществе больше скорости света в вакууме c . Но это не противоречит теории относительности (речь идет о фазовой скорости).
- Изложенные результаты справедливы не только для электронов, но и для ионов. В последнем случае под m , e и N следует понимать массу, заряд и концентрацию ионов.

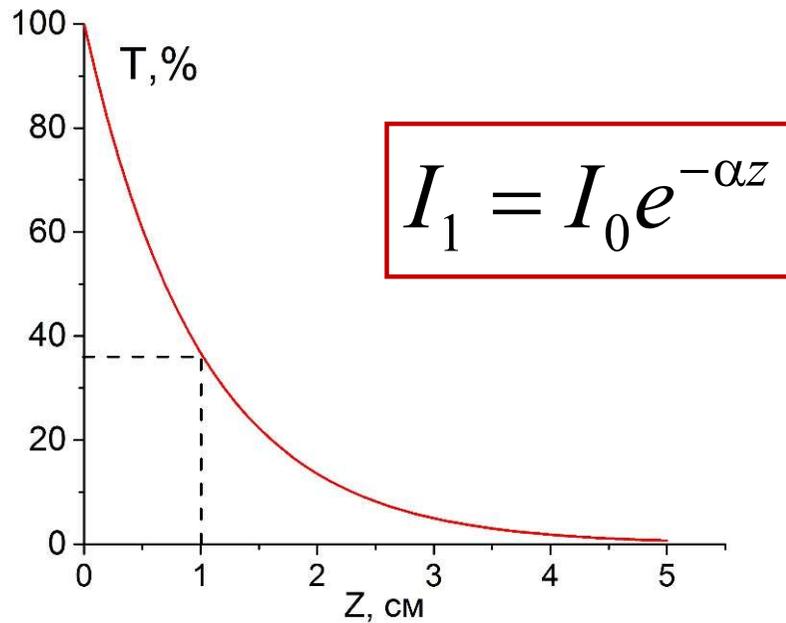
Закон Бугера-Ламберта-Бера



Экспериментально открыт П. Бугером (1729),
теоретически выведен И.Г. Ламбертом (1760),
для растворов исследован А. Бером (1852)

$$T = \frac{I_1}{I_0} \quad \text{- пропускание, \%}$$

α - коэффициент поглощения, см^{-1}

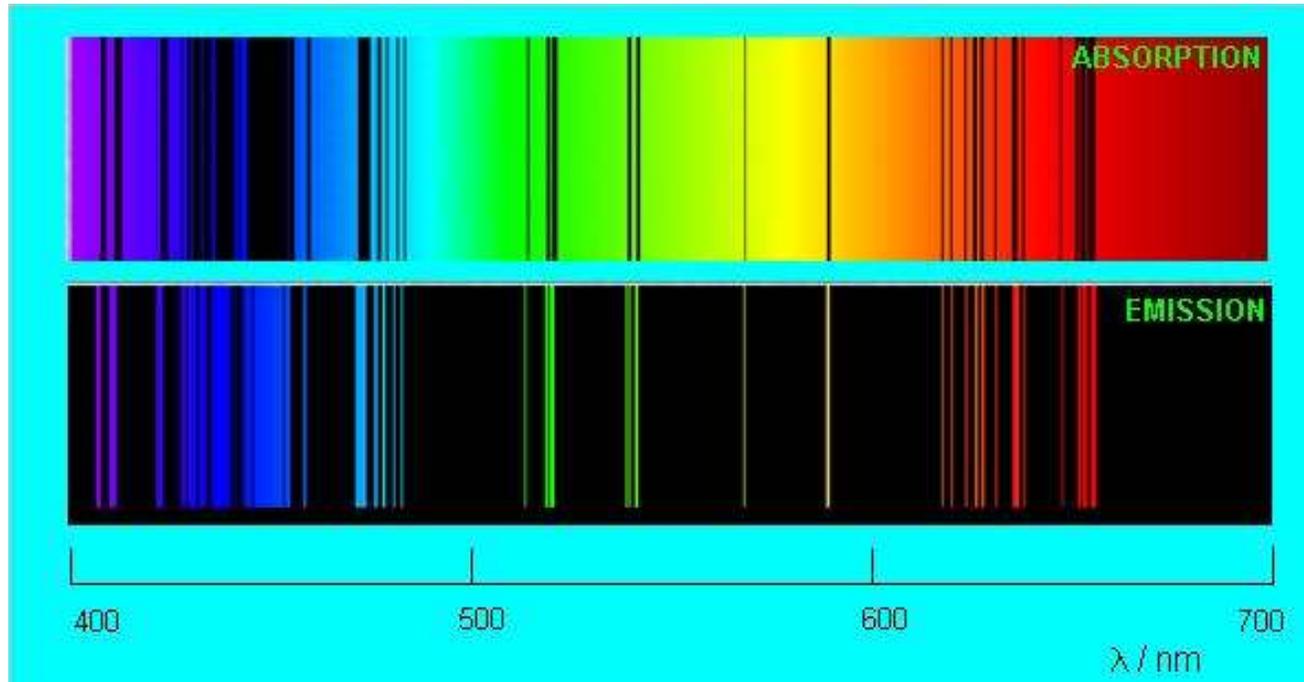


$$I_1 = I_0 e^{-\alpha z}$$

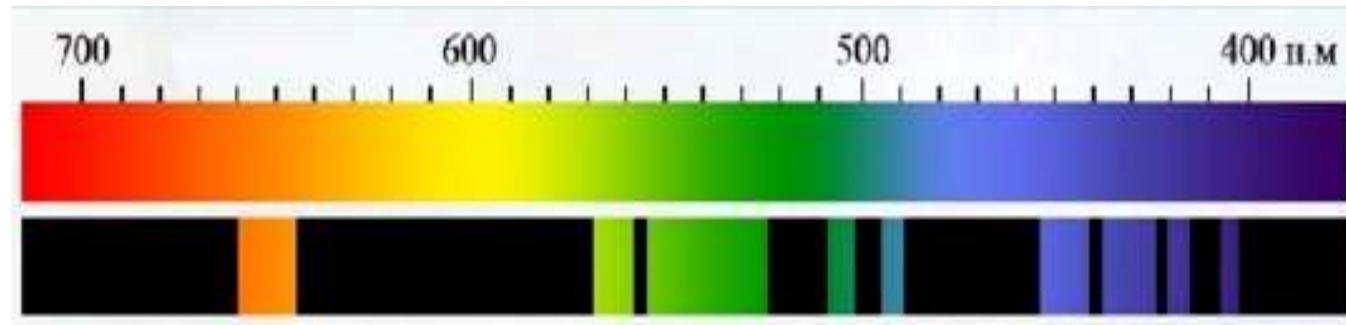
$$\alpha(\lambda) = c \cdot \sigma(\lambda)$$

c – концентрация, см^{-3}
 σ - сечение поглощения, см^2

Линейчатые и полосатые спектры

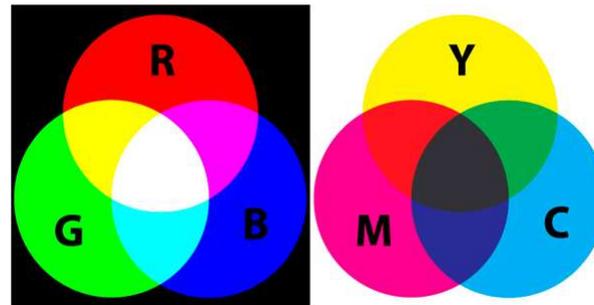
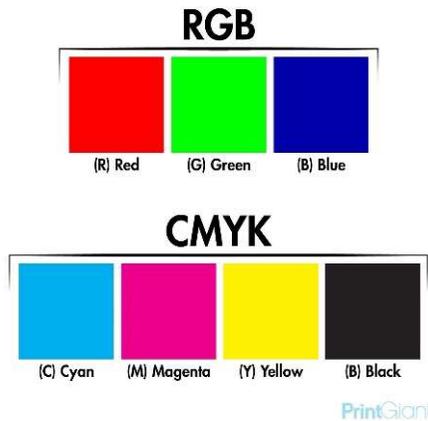


Спектры
поглощения и
испускания
паров натрия



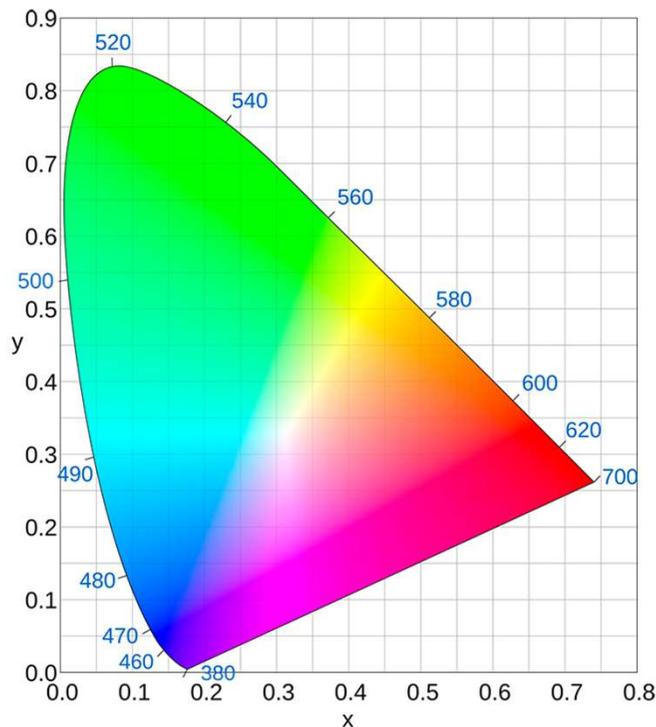
Спектр
испускания
молекулы N_2

Цветовые модели

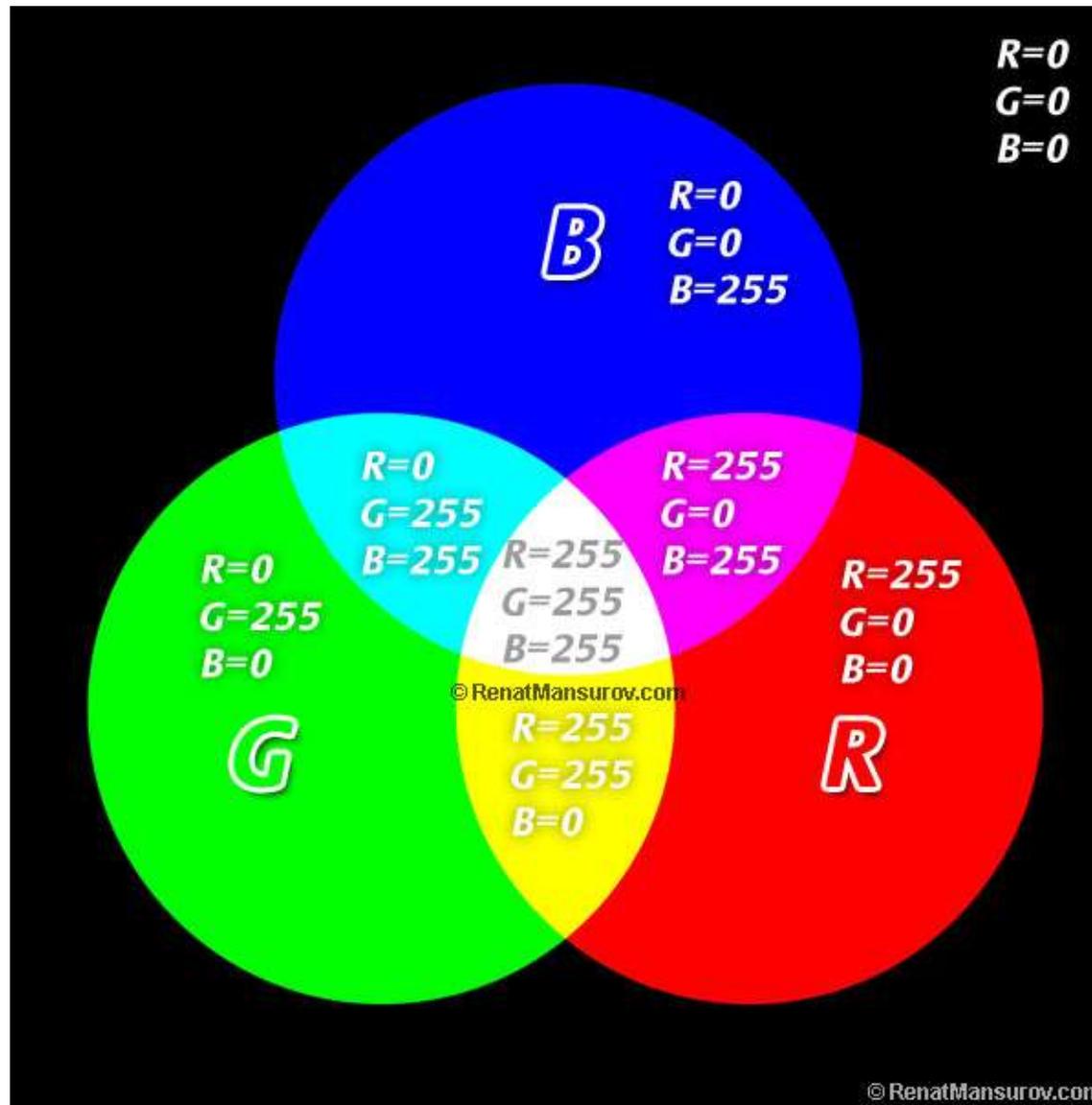


$$Ц = RR + GG + BB,$$

Законы Грассмана:



1. Любой цвет однозначно выражается через три цвета, если они линейно независимы. Этот закон утверждает трехмерность феномена цвета.
2. При непрерывном изменении излучения цвет смеси также меняется непрерывно. Нет такого цвета, к которому нельзя было бы подобрать бесконечно близкий цвет.
3. Закон аддитивности цветовых уравнений: если цвета смешиваемых излучений описываются цветовыми уравнениями, то цвет смеси выражается суммой цветовых уравнений.



$R=0$
 $G=0$
 $B=0$

B
 $R=0$
 $G=0$
 $B=255$

$R=0$
 $G=255$
 $B=255$

$R=255$
 $G=0$
 $B=255$

$R=0$
 $G=255$
 $B=0$

$R=255$
 $G=255$
 $B=255$

$R=255$
 $G=0$
 $B=0$

$R=255$
 $G=255$
 $B=0$

G

R

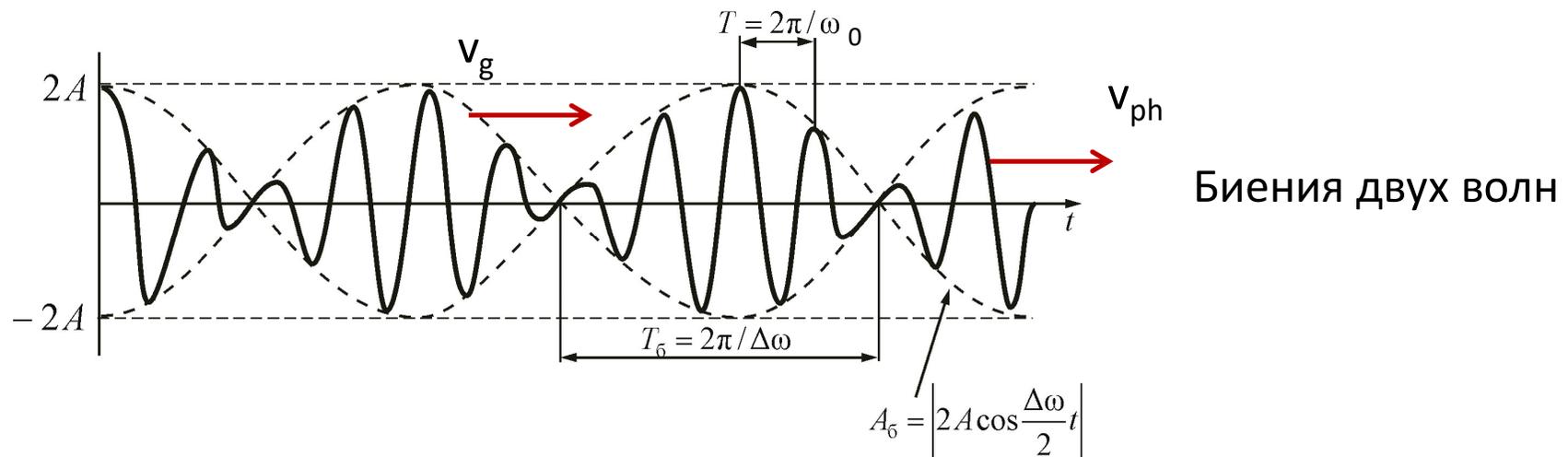
Распространение светового импульса в диспергирующей среде

Рассмотрим понятие групповой скорости на примере двух близких по частоте плоских монохроматических волн, распространяющихся в диспергирующей среде вдоль оси z

$$E_{1,2}(z, t) = A \sin(\omega_{1,2}t - k_{1,2}z)$$

Суммарное колебание имеет вид: $E(z, t) = E_1(z, t) + E_2(z, t) = 2A \cos(\Delta\omega t - \Delta kz)$

где $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1)/2$, $k_0 = (k_2 + k_1)/2$, $\Delta k = (k_2 - k_1)/2$, $\Delta\omega = (\omega_2 - \omega_1)/2$, $|\Delta k| \ll k_0$, $|\Delta\omega| \ll \omega_0$



Для нахождения групповой скорости v_g запишем условие постоянства амплитуды

$$\Delta\omega t - \Delta kz = \text{const}$$

Дифференцируем по t :

$$\Delta\omega - \Delta k \frac{dz}{dt} = 0 \qquad v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

Используя $k(\omega) = \frac{\omega}{c} n(\omega)$

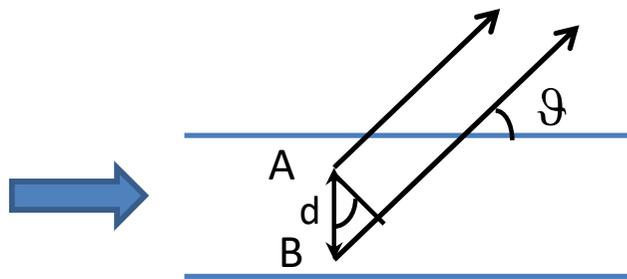
$$v_g = \frac{v_{ph}}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{\partial n}{\partial \omega}}$$

Для области нормальной дисперсии, где $\partial n / \partial \omega > 0$, $v_g < v_{ph}$. Это означает, что модуляция световой волны перемещается медленнее, чем несущая. Различие между фазовой и групповой скоростью тем больше, чем больше дисперсия $\partial n / \partial \omega$. В отсутствие дисперсии $v_{ph} = v_g$. Это строго выполняется лишь для вакуума, где свет на любой частоте распространяется со скоростью c .

Понятие групповой скорости, введенное на примере двух волн, остается справедливым и в случае, когда мы имеем дело с импульсом, состоящим из большого числа спектральных составляющих.

Рассеяние света в мутных средах

К объяснению механизма прямолинейного распространения света в однородной среде



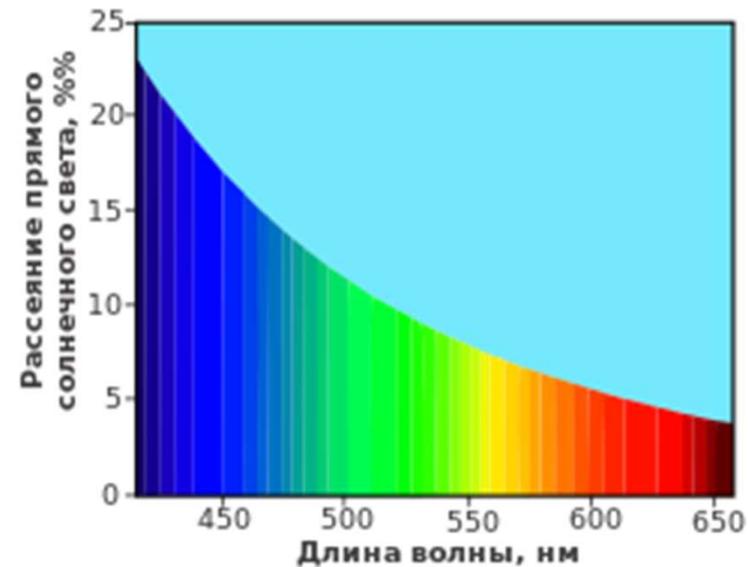
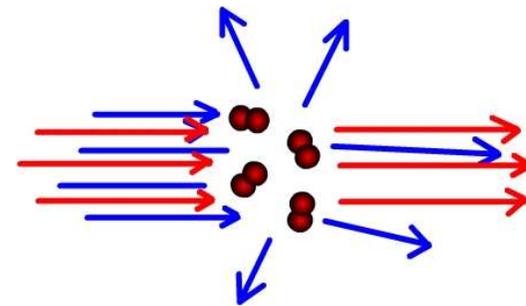
$$d \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2}$$

Закон Релея:

$$I_p \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

$$\frac{\lambda_{\text{син}}}{\lambda_{\text{кр}}} = \frac{450}{650} = \frac{1}{1,44}$$

В неоднородной среде свет не будет прямолинейным



Цвет неба и поляризация света при рассеянии



Солнечное излучение, рассеянное молекулами воздуха, поляризовано. В этом можно убедиться, если посмотреть в солнечный день на голубое небо через поляроид. Вращая поляроид, вы увидите как возникают темные полосы, возникновение которых и свидетельствует о поляризации рассеянного света.

Поляризация света при рассеянии. Наблюдатель видит полную проекцию движения электрона на ось x и лишь часть проекции на ось y , пропорциональную $\cos \vartheta$. При $\vartheta = \pi/2$ рассеянное излучение полностью поляризовано по оси x .

