

*"Так природа захотела,
Почему - не наше дело,
Для чего - не нам судить..."*

Б. Окуджава.

Лекция 12

Кристаллооптика

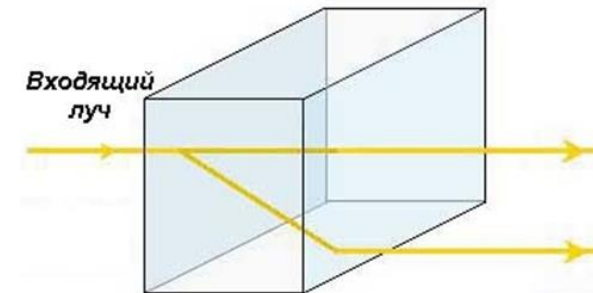
План.

1. Оптическая анизотропия и основные эффекты кристаллооптики.
2. Структура световой волны в анизотропном кристалле.
3. Одноосный кристалл.



Самый известный из хрустальных черепов был обнаружен в 1927 году американским археологом Ф. А. Митчеллом-Хеджесом во время раскопок древнего города майя Лубаантун в джунглях Британского Гондураса. Череп нашли в развалинах разрушенного храма. Оказалось, что он изготовлен из кусков горного хрусталя и непонятным образом светится изнутри. Возраст его определили в несколько десятков тысяч лет.

Оптическая анизотропия и основные эффекты кристаллооптики

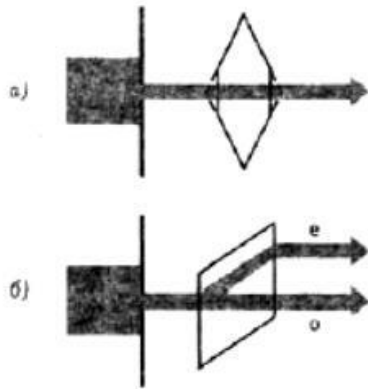


Анизотро́пия — различие свойств среды в различных направлениях внутри этой среды; в противоположность **изотропии**.

В отношении одних свойств среда может быть *изотропна*, а в отношении других — *анизотропна*; степень анизотропии также может различаться.

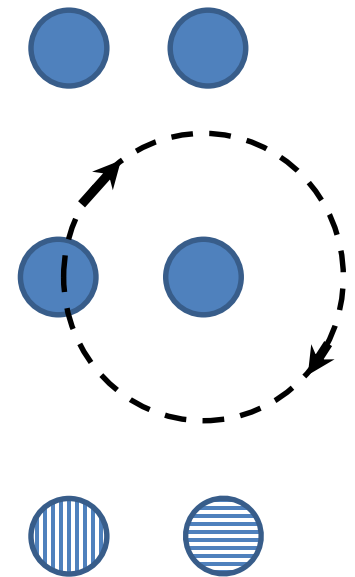
Наряду с **анизотропией оптической** кристаллы демонстрируют анизотропию:

- прочности
- теплопроводности
- теплового расширения
- электропроводности

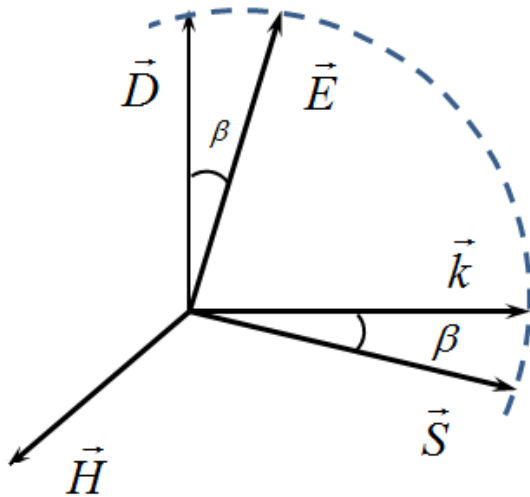


Прохождение света вдоль оси исландского шпата (а).
Двойное лучепреломление света, падающего нормально к естественной грани кристалла исландского шпата (б)

- Луч, который проходит прямо называют **обыкновенным лучом (о)**, а другой — **необыкновенным (е)**.
- При повороте кристалла относительно оси падающего пучка пятно, соответствующее обыкновенному лучу, на экране остается неподвижным, а второе, соответствующее необыкновенному, поворачивается вокруг первого синхронно с поворотом кристалла.
- Оба луча, вышедших из кристалла, линейно поляризованы, причем направления поляризации в них взаимно ортогональны.
- Это явление называется **двойным лучепреломлением**, а зависимость оптических свойств, например, показателя преломления, от направления в кристалле называют **оптической анизотропией**



Структура световой волны в анизотропном кристалле



Для плоских монохроматических волн в комплексном представлении уравнения Максвелла имеют вид:

$$[\vec{k}, \vec{E}] = \frac{\omega}{c} \vec{H} \quad [\vec{k}, \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D}$$

Взаимная ориентация векторов E , H , D и k в анизотропном кристалле.

$$(\vec{k}, \vec{D}) = 0 \quad (\vec{k}, \vec{H}) = 0$$

Векторы H , D , k образуют правую тройку взаимно перпендикулярных векторов. Вектор E перпендикулярен вектору H и лежит в плоскости векторов D и k , но вообще говоря, **не параллелен** вектору D .

Направление переноса энергии в световой волне определяется вектором Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}]$

Вектор S перпендикулярен векторам E и H и лежит в плоскости векторов k , E , D , но он не параллелен вектору k . Угол между векторами k и S равен углу между векторами D и E и называется **углом анизотропии**.

Подвижность оптических электронов по отношению к различным направлениям в кристалле неодинакова. Поэтому связь между поляризованностью и напряженностью световой волны имеет вид:

$$P_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha x} E_x + \varepsilon_{\alpha y} E_y + \varepsilon_{\alpha z} E_z$$

или

$$P_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta} E_{\beta}$$

В анизотропной среде связь между поляризованностью и полем имеет **тензорный характер**, а восприимчивость представляет собой **тензор**

Так как $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, то $D_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) E_{\beta}$

где $\varepsilon_{\alpha,\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} + 4\pi\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)$ - **тензор диэлектрической проницаемости** линейной анизотропной среды.

$\delta_{\alpha\beta}$ - символ Кронекера

В прозрачной среде тензоры линейной оптической восприимчивости и диэлектрической проницаемости симметричны

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Можно выбрать направления осей так, что тензор будет диагональным}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$$D_x = \varepsilon_{xx} E_x, \quad D_y = \varepsilon_{yy} E_y, \quad D_z = \varepsilon_{zz} E_z,$$

Направления x, y, z в кристалле, для которых выполняются равенства называются главными направлениями, а величины $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$ - **главными диэлектрическими проницаемостями** анизотропного кристалла. В общем случае

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$$

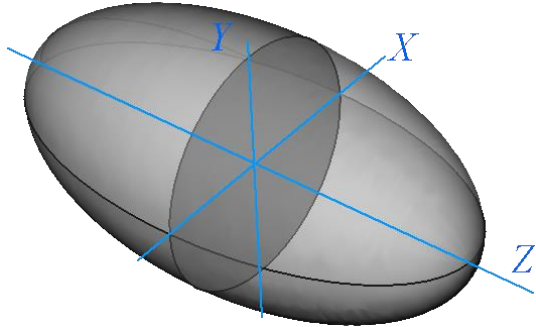
$$n_x = \sqrt{\varepsilon_{xx}}, \quad n_y = \sqrt{\varepsilon_{yy}}, \quad n_z = \sqrt{\varepsilon_{zz}}$$

$$v_x = c/n_x, \quad v_y = c/n_y, \quad v_z = c/n_z,$$

Двуосные кристаллы: $n_x \neq n_y \neq n_z$

Одноосные кристаллы: $n_x = n_y \neq n_z$ z -оптическая ось кристалла, $n_x = n_y = n_o$
 $n_z = n_e$

Кристаллы, у которых $n_e > n_o$ называют **положительными** (кварц), а при $n_e < n_o$ - **отрицательными** (исланский шпат).



Приведение тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ к диагональному виду означает поворот системы координат. Такому тензору может быть поставлена в соответствие поверхность второго порядка, которую называют **эллипсоидом диэлектрической проницаемости**

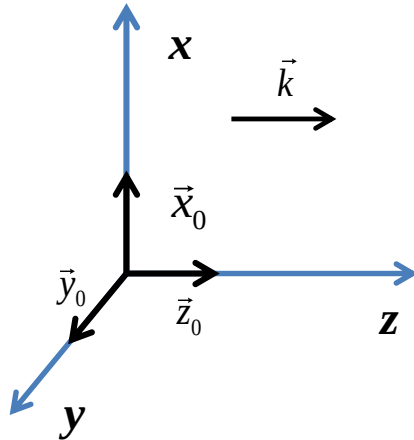
$$\frac{x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{zz}} = 1$$

Эллипсоид показателя преломления:

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

Главные полуоси этого эллипса и будут значением показателя преломления для двух взаимно перпендикулярно поляризованных компонент.

Собственные состояния поляризации световой волны в анизотропном кристалле

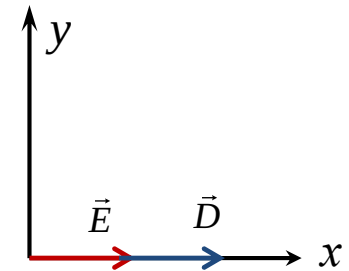


К анализу собственных состояний поляризации световой волны в анизотропном кристалле.

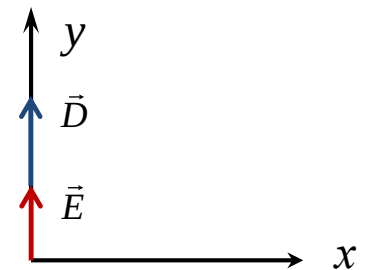
$$\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$$

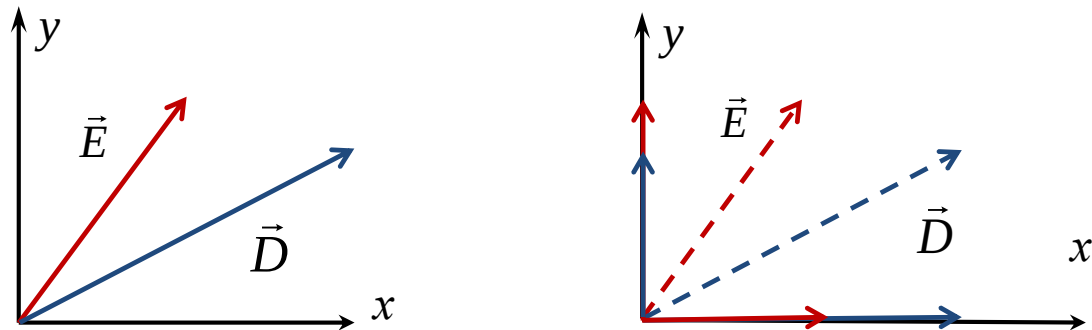
- орты главных осей кристалла

1. Волна поляризована вдоль главной оси x кристалла ($\vec{D} \parallel \vec{x}_0$). Тогда $D_y = D_z = 0$ и $E_y = E_z = 0$, $D_x = \epsilon_{xx} E_x$, откуда следует, что вектор D параллелен вектору E . Волна подобна изотропной и имеет скорость $v_1 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{xx}}}$. Поляризация волны устойчива.



2. Волна поляризована вдоль главной оси y кристалла ($\vec{D} \parallel \vec{y}_0$). Тогда $D_x = D_z = 0$ и $E_x = E_z = 0$, $D_y = \epsilon_{yy} E_y$, откуда следует, что вектор D параллелен вектору E . Волна подобна изотропной и имеет скорость $v_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{yy}}}$. Поляризация волны устойчива.



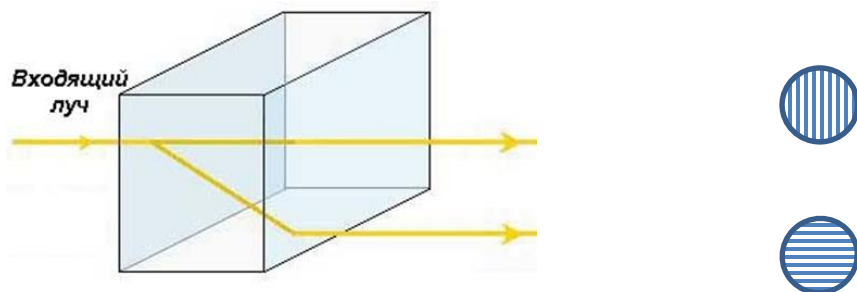


3. Пусть $\vec{D}$ имеет произвольную ориентацию. Учитывая, что $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy}$, приходим к выводу, что векторы D и E лежат в плоскости x, y , но не параллельны друг другу. Однако в этом случае векторы D, E, k не компланарны и, следовательно, волна с такой структурой не может распространяться в кристалле в силу уравнений Максвелла. Таким образом, в анизотропном кристалле волна распадается на две волны с ортогональными поляризациями, бегущими с разными скоростями, т.е.

$$\vec{D} = \vec{x}_0 D_x + \vec{y}_0 D_y$$

По мере распространения в кристалле разность фаз между ортогональными компонентами поля будет меняться. Поэтому волна в кристалле будет иметь эллиптическую поляризацию, причем параметры эллипса поляризации будут меняться по мере изменения расстояния, пройденной волной в кристалле.

В анизотропном кристалле произвольная световая волна неустойчива — она распадается на две линейно поляризованные волны с ортогональными направлениями поляризации, которые бегут в одном и том же направлении, но с разными фазовыми скоростями. В рассмотренном примере, когда световая волна распространяется вдоль главной оси z кристалла, есть только два устойчивых состояния поляризации волны: линейная поляризация вдоль оси x и линейная поляризация вдоль оси y . Эти состояния поляризации называют **собственными состояниями поляризации** световой волны в анизотропном кристалле.



Для каждого направления k распространения световой волны в кристалле имеются два "разрешенных" ("собственных") направления поляризации, которые ортогональны друг другу. Произвольно поляризованная волна распадается на две линейно поляризованные «собственные» волны, распространяющиеся с разными скоростями.

Одноосный кристалл

Допустимые состояния поляризации волны определяются следующими обстоятельствам:

- Из-за анизотропии кристалла векторы D и E световой волны не параллельны друг другу.

$$D_x = n_0^2 E_x, \quad D_y = n_0^2 E_y, \quad D_z = n_e^2 E_z$$

- В силу уравнений Максвелла векторы D , E и k должны лежать в одной плоскости, т.е. должны быть компланарными.

$$\left(\vec{k}, [\vec{E}, \vec{D}] \right) = 0$$

Эти уравнения являются независимыми. Все вместе они могут выполняться не для всякой поляризации, а лишь для некоторых избранных поляризаций, которые и называются **собственными поляризациями** световой волны в анизотропном кристалле.

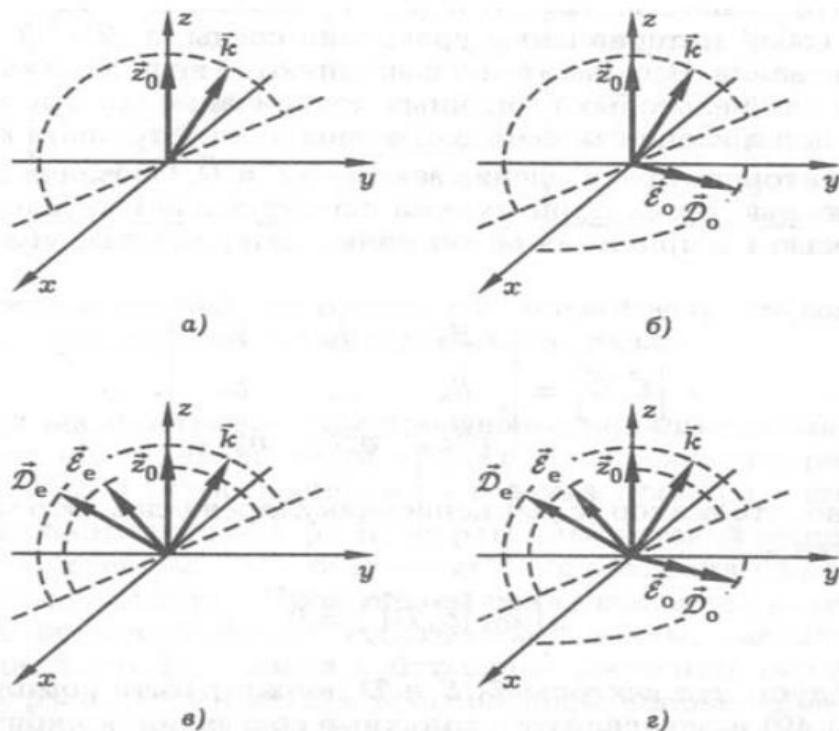
Одноосный кристалл

Так как вектор $[\vec{E}, \vec{D}]$ перпендикулярен оси, то $(z_0, [\vec{E}, \vec{D}]) = 0$

Оба указанных условия выполняются в двух случаях:

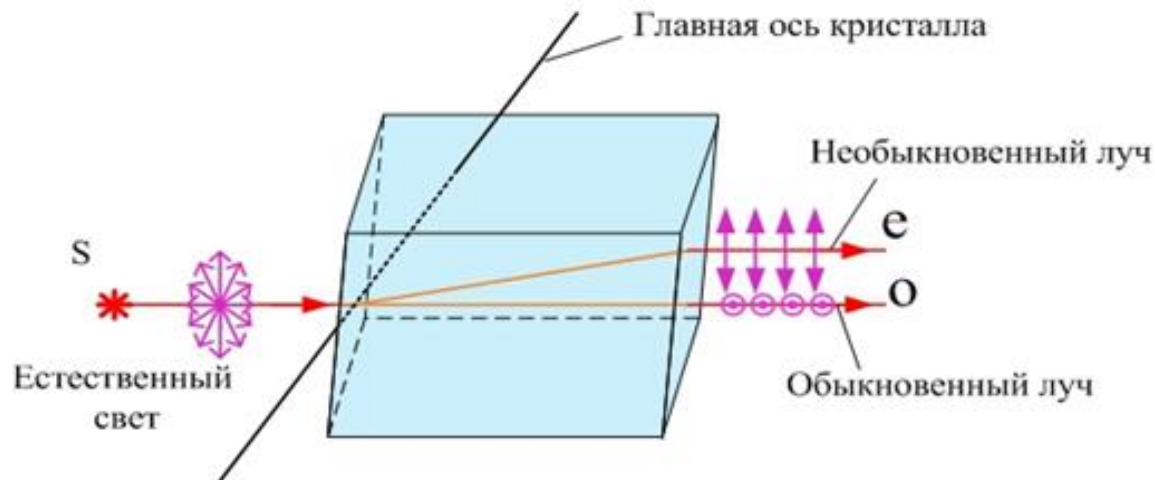
- Если $\vec{D} \parallel \vec{E}_0$ и, следовательно, $[\vec{E}, \vec{D}] = 0$ (о-волна)
- Если вектор D лежит в плоскости векторов z_0 и k $(z_0, [\vec{k}, \vec{D}]) = 0$ (е-волна)

Главная плоскость — плоскость, в которой лежат волновой вектор световой волны $\vec{k}$ и оптическая ось z_0 одноосного анизотропного кристалла.



Поляризация обыкновенной и необыкновенной световых волн в одноосном анизотропном кристалле. Главная плоскость (а), поляризация обыкновенной волны (б), поляризация необыкновенной волны (в), взаимная ориентация обыкновенной и необыкновенной волн (г). Пунктирной линией соединены концы векторов, лежащих в одной плоскости

- В одноосном анизотропном кристалле для любого направления k существует два разрешенных ("собственных") направления поляризации световой волны. Одно из них перпендикулярно главной плоскости, другое ей параллельно.
- Волна с произвольным состоянием поляризации распадается в кристалле на две линейно поляризованные волны со взаимно ортогональными ("собственными") направлениями поляризации.
- Скорости распространения этих волн различны. Скорость обыкновенной волны не зависит от направления распространения и равна $v_0 = c/n_0$. Скорость необыкновенной волны зависит от направления распространения в кристалле и лежит в диапазоне между c/n_0 и c/n_e . Последнее означает, что показатель преломления для необыкновенной волны зависит от направления распространения.



Определим скорость необыкновенной волны для заданного направления распространения в кристалле.

Из уравнений Максвелла для плоских волн, запишем дисперсионное уравнение:

$$\left[\vec{k}, \left[\vec{k}, \vec{E} \right] \right] + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} = 0 \quad \text{или} \quad (\vec{k}, \vec{E}) \vec{k} - k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{D} = 0$$

Для обыкновенной волны: $\vec{D} = n_0^2 \vec{E}, \quad (\vec{k}, \vec{E}) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c} n_0, \quad v_0 = \frac{c}{n_0}$

Для необыкновенной волны введем единичный вектор: $\vec{m} = \frac{\vec{k}}{k}$

$$\vec{E} - \frac{1}{n^2} \vec{D} = (\vec{m}, \vec{E}) \vec{m} \quad \text{Переходя к декартовым компонентам, получаем:}$$

$$D_x = \frac{(\vec{m}, \vec{E}) m_x}{\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}}$$

$$D_y = \frac{(\vec{m}, \vec{E}) m_y}{\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}}$$

$$D_z = \frac{(\vec{m}, \vec{E}) m_z}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}}$$

Поскольку: $(\vec{m}, \vec{D}) = 0$, $m_x D_x + m_y D_y + m_z D_z = 0$

$$\frac{\frac{m_x^2}{n_0^2} + \frac{m_y^2}{n^2}}{\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{\frac{m_z^2}{n_e^2}}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

Это уравнение называется **уравнением нормалей Френеля**, оно позволяет рассчитать показатель преломления необыкновенной волны n для любого направления в кристалле.

Задача: рассчитать n в случае, когда волновой вектор направлен:

- а) вдоль оси x ;
- б) вдоль оси y ;
- б) вдоль оси z .

Уравнение Френеля удобно записать в более компактном виде, если характеризовать направление распространения света в среде углом φ между волновым вектором и оптической осью кристалла. Учитывая, что:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$$

$$m_z = \cos \varphi, m_x^2 + m_y^2 = \sin^2 \varphi$$

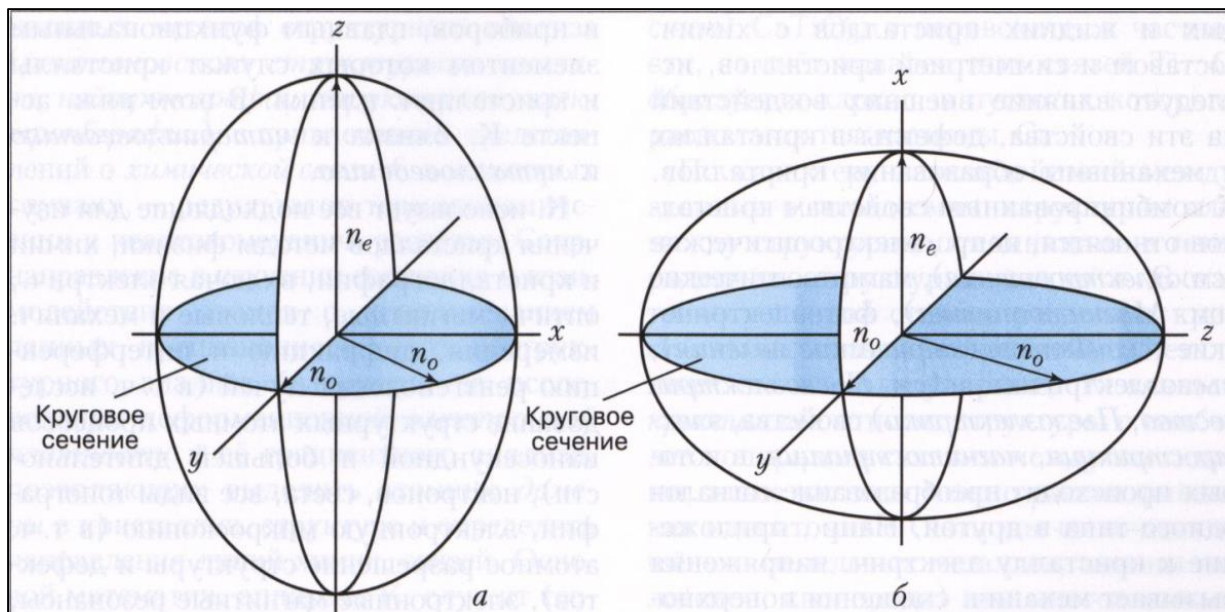
Уравнение нормалей Френеля можно записать в виде:

$$\frac{\frac{\sin^2 \varphi}{\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}} + \frac{\cos^2 \varphi}{\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n^2}} = 0$$

Окончательно:

$$n(\varphi) = \frac{n_0 n_e}{\sqrt{n_e^2 \cos^2 \varphi + n_0^2 \sin^2 \varphi}}$$

Таким образом, зная главные показатели преломления одноосного кристалла и направление распространения, можно вычислить показатель преломления необыкновенной волны и ее скорость для любого направления в кристалле



Оптическая индикатриса одноосных кристаллов: а) положительных, б) отрицательных